

# Sur la détermination des sorties plates par calcul formel

Felix ANTRITTER<sup>1</sup>, Jean LÉVINE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Automatisierungs- und Regelungstechnik, Universität der Bundeswehr München  
Werner-Heisenberg-Weg 37, DE-85579 Neubiberg, Germany

<sup>2</sup> Centre Automatique et Systèmes, École des Mines de Paris, ParisTech  
35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, France

`felix.antritter@unibw.de, jean.levine@ensmp.fr`

**Résumé**— Dans ce papier, nous étudions la possibilité de déterminer les *sorties plates* d'un système non linéaire par calcul formel. Rappelons qu'une sortie plate est une sortie généralisée particulière telle que toutes les courbes intégrales du système peuvent s'exprimer comme les images, par une application infiniment dérivable, des composantes de cette sortie plate et d'un nombre fini de ses dérivées successives par rapport au temps. Nous utilisons ici les caractérisations récentes de [1], [2] dans le cadre des variétés de jets d'ordre infini (voir par ex. [3], [4]). Les étapes successives de l'algorithme formel sont discutées sur l'exemple classique du véhicule non holonome.

**Mots-clés**— Systèmes non linéaires, platitude différentielle, sortie plate, calcul formel.

## I. INTRODUCTION

Considérons le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est le vecteur d'état,  $u = (u_1, \dots, u_m)$  le vecteur des entrées,  $m \leq n$ , et  $f$  une fonction méromorphe en tous ses arguments.

On dit que ce système est *différentiellement plat*, ou, plus brièvement, *plat* ([5], [6]), si et seulement s'il existe un vecteur  $y = (y_1, \dots, y_m)$  vérifiant :

- (i)  $y$  et ses dérivées successives par rapport au temps  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$  sont fonctionnellement indépendents,
- (ii)  $y$  est une fonction de  $x, u$  et d'un nombre fini de dérivées successives des composantes de  $u$ ,
- (iii)  $x$  et  $u$  peuvent s'exprimer en fonction des composantes de  $y$  et d'un nombre fini de ses dérivées successives :

$$x = \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha)}), \quad u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha+1)})$$

pour un multi-entier  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  bien choisi, et avec la notation  $y^{(\alpha)} = (\frac{d^{\alpha_1} y_1}{dt^{\alpha_1}}, \dots, \frac{d^{\alpha_m} y_m}{dt^{\alpha_m}})$ .

Un vecteur  $y$  jouissant de ces propriétés est appelé *sortie plate*.

Ce concept a inspiré une littérature importante et un grand nombre d'applications pratiques et industrielles (voir par ex. [3] pour un survey). Son principal avantage réside dans la simplicité de la solution des problèmes de *planification de trajectoire* et de *poursuite de trajectoire avec stabilité*.

Plusieurs formalismes ont été introduits pour l'étude de cette classe remarquable de systèmes : des approches de

géométrie différentielle de dimension finie ([7], [8], [9], [10]), d'algèbre différentielle ([11], [12], [13]), de géométrie différentielle des jets et proongations infinies ([4], [14], [15], [16], [17]). Parmi ces contributions, la caractérisation de la platitude différentielle prend une large part ([12], [7], [18], [8], [13], [19], [20], [21], [17], [22], [9], [10], [1], [2]).

Nous reprenons ici les résultats de [1], [2] dans le formalisme des variétés de jets d'ordre infini ([4], [23], [15], [24]), les systèmes étant représentés sous forme implicite, obtenus à partir de (1) en éliminant le vecteur d'entrées  $u$ . On rappelle les notions d'équivalence de Lie-Bäcklund et d'isomorphisme de Lie-Bäcklund dans ce contexte, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes de platitude en termes de matrices polynômiales et de formes différentielles. Cette approche peut être vue comme une généralisation aux systèmes non linéaires de [25] et permet d'obtenir des conditions qui sont invariantes par extension dynamique endogène.

Les conditions obtenues font appel à des opérateurs différentiels qui combinent des aspects géométriques comme la dérivation extérieure et le produit extérieur des formes différentielles, à des aspects d'algèbre non commutative sur les polynômes de  $\frac{d}{dt}$  à coefficients méromorphes. Les applications récentes de calcul formel, comme Maple ou Mathematica, proposent de nombreuses fonctionnalités dans le cadre de chacun de ces domaines séparément, mais un environnement commun reste à construire. Dans ce papier, nous détaillons la construction des opérateurs considérés et montrons comment ils peuvent être programmés dans un langage formel standard comme Maple 11.

Ce papier est organisé comme suit : la section II est consacrée à la description des systèmes implicites sur les variétés de jets d'ordre infini. Les notions d'équivalence de Lie-Bäcklund et d'isomorphisme de Lie-Bäcklund sont rappelés dans ce contexte, afin d'introduire la platitude différentielle. Dans la section III, nous rappelons les conditions nécessaires et suffisantes de [1], [2] et la section IV étudie en détail les opérateurs et conditions introduites, conduisant à l'algorithme développé dans la section III. Enfin, dans la section V, nous montrons comment fonc-

tionne l'algorithme sur l'exemple bien connu du véhicule non holonome.

## II. SYSTÈMES IMPLICITES COMMANDÉS SUR LES VARIÉTÉS DE JETS D'ORDRE INFINI

Étant donnée une variété différentielle analytique  $X$  de dimension  $n$ , on note son espace tangent au point  $x \in X$  par  $T_x X$ , et son fibré tangent par  $TX$ . Soit  $F$  une fonction méromorphe de  $TX$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$ . On considère le système implicite sous-déterminé

$$F(x, \dot{x}) = 0 \quad (2)$$

régulier au sens où  $\text{rg } \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = n - m$  dans un ouvert dense convenable de  $TX$ .

D'après le théorème des fonctions implicites, tout système explicite (1) avec  $x \in X$ ,  $(x, f(x, u)) \in T_x X$  pour tout  $u$  dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ , vérifiant  $\text{rg } \frac{\partial f}{\partial u} = m$  dans un ouvert convenable de  $X \times U$ , peut être localement transformé en (2), et inversement.

Un champ de vecteurs  $f$  qui dépend, pour tout  $x \in X$ , de  $m$  variables indépendentes  $u \in \mathbb{R}^m$  de façon méromorphe avec  $\text{rg } \frac{\partial f}{\partial u} = m$  dans un ouvert de  $X \times \mathbb{R}^m$ , et vérifiant  $F(x, f(x, u)) = 0$  pour tout  $u \in U$ , est dit *compatible* avec (2). Notons cependant que la représentation implicite (2), contrairement à (1), a l'avantage évident d'être invariante par extension dynamique endogène (voir [4] pour une définition précise).

Dans [4] (voir aussi [15] où une approche similaire a été développée indépendamment), le système infini de coordonnées  $(x, \bar{u}) = (x, u, \dot{u}, \dots)$  a été introduit, permettant de prolonger le champ de vecteurs  $f$  sous la forme

$$\bar{f}(x, \bar{u}) = \sum_{i=1}^n f_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} u_j^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_j^{(k)}}$$

pour le système sous forme explicite (1).

D'après [1], [2], nous adoptons la description externe de la variété prolongée contenant les solutions de (2) : soit la variété de dimension infinie  $\mathfrak{X}$  définie par  $\mathfrak{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{R}_\infty^n \stackrel{\text{def}}{=} X \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots$ , constituée d'une infinité dénombrable de copies de  $\mathbb{R}^n$ , munie de la topologie produit, et on suppose donnée la suite infinie de coordonnées globales de  $\mathfrak{X}$  :

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n, \dots, \dots, x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots). \quad (3)$$

Rappelons que, pour cette topologie, une fonction  $\varphi$  de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$  est *continue* (resp. *différentiable*) si  $\varphi$  ne dépend que d'un nombre fini (mais arbitraire) de variables et est continue (resp. différentiable) par rapport à ces variables. Les fonctions  $C^\infty$  ou analytiques ou encore méromorphes de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$  sont définies comme en dimension finie, sachant qu'elles ne dépendent que d'un nombre fini de variables. On munit  $\mathfrak{X}$  du *champ de Cartan trivial* ([23], [24])

$$\tau_{\mathfrak{X}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq 0} x_i^{(j+1)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}}. \quad (4)$$

On note aussi  $L_{\tau_{\mathfrak{X}}} \varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j \geq 0} x_i^{(j+1)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^{(j)}} = \frac{d\varphi}{dt}$  la dérivée de Lie de la fonction différentiable  $\varphi$  le long de  $\tau_{\mathfrak{X}}$  et  $L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \varphi$  son itérée d'ordre  $k$ . On a alors  $x_i^{(k)} = \frac{d^k x_i}{dt^k} = L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k x_i$

pour tout  $i = 1, \dots, n$  et  $k \geq 1$ , avec la convention  $x_i^{(0)} = x_i$ .

Comme  $\frac{d}{dt} x_i^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_i^{(j)} = x_i^{(j+1)}$ , le champ de Cartan agit sur les coordonnées comme un décalage à droite.  $\mathfrak{X}$  est donc appelée *variété de jets d'ordre infini*. Dorénavant,  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  représentent des suites de jets d'ordre infini de  $x, y, \dots$

Un *système implicite commandé régulier* est défini par le triplet  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  avec  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$ ,  $\tau_{\mathfrak{X}}$  le champ de Cartan trivial associé, et  $F$  méromorphe de  $TX$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$  vérifiant  $\text{rg } \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = n - m$  dans un ouvert convenable de  $TX$ .

### A. Équivalence de Lie-Bäcklund pour les systèmes implicites commandés

Rappelons de [1], [2] les définitions suivantes :

Soient deux systèmes implicites commandés réguliers  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$ , avec  $\mathfrak{X} = X \times \mathbb{R}_\infty^n$ ,  $\dim X = n$  et  $\text{rg } \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = n - m$ , et  $(\mathfrak{Y}, \tau_{\mathfrak{Y}}, G)$ , avec  $\mathfrak{Y} = Y \times \mathbb{R}_\infty^p$ ,  $\dim Y = p$ ,  $\tau_{\mathfrak{Y}}$  son champ de Cartan trivial, et  $\text{rg } \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} = p - q$ .

Posons  $\mathfrak{X}_0 = \{\bar{x} \in \mathfrak{X} | L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k F(\bar{x}) = 0, \forall k \geq 0\}$  et  $\mathfrak{Y}_0 = \{\bar{y} \in \mathfrak{Y} | L_{\tau_{\mathfrak{Y}}}^k G(\bar{y}) = 0, \forall k \geq 0\}$ . Ils sont munis des topologies et structures différentiables induites par celles de  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  respectivement.

*Définition 1:* On dit que les systèmes implicites commandés réguliers  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  et  $(\mathfrak{Y}, \tau_{\mathfrak{Y}}, G)$  sont *Lie-Bäcklund équivalents* (ou, de façon abrégée, L-B équivalents) en le couple de points  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Y}_0$  si et seulement si

- (i) il existe des voisinages  $\mathcal{X}_0$  et  $\mathcal{Y}_0$  de  $\bar{x}_0$  dans  $\mathfrak{X}_0$  et de  $\bar{y}_0$  dans  $\mathfrak{Y}_0$  respectivement et une application bijective méromorphe  $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots)$  de  $\mathcal{Y}_0$  dans  $\mathcal{X}_0$  vérifiant  $\Phi(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$  et telle que les champs de Cartan triviaux soient  $\Phi$ -reliés, i.e.  $\Phi_* \tau_{\mathfrak{Y}} = \tau_{\mathfrak{X}}$  ;
- (ii) il existe  $\Psi$  bijective et méromorphe de  $\mathcal{X}_0$  dans  $\mathcal{Y}_0$ , avec  $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \dots)$ , telle que  $\Psi(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$  et  $\Psi_* \tau_{\mathfrak{X}} = \tau_{\mathfrak{Y}}$ .

Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  sont dites *isomorphismes de Lie-Bäcklund inverses l'un de l'autre* en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ .

Les deux systèmes  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  et  $(\mathfrak{Y}, \tau_{\mathfrak{Y}}, G)$  sont dits *localement L-B équivalents* s'ils sont L-B équivalents en toute paire de points  $(\bar{x}, \Psi(\bar{x})) = (\Phi(\bar{y}), \bar{y})$  d'un ouvert dense  $\mathcal{Z}$  de  $\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Y}_0$ , avec  $\Phi$  et  $\Psi$  isomorphismes de Lie-Bäcklund inverses l'un de l'autre sur  $\mathcal{Z}$ .

On peut montrer que l'équivalence L-B locale préserve les points d'équilibre, i.e. les points  $\bar{y}$  (resp.  $\bar{x}$ ) tels que  $G(\bar{y}, 0) = 0$  (resp.  $F(\bar{x}, 0) = 0$ ), ainsi que les corangs ( $m = q$ ).

### B. Formes différentielles

Introduisons une base de l'espace tangent  $T_{\bar{x}} \mathfrak{X}$  de  $\mathfrak{X}$  au point  $\bar{x} \in \mathfrak{X}$ , constituée de l'ensemble des vecteurs

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i^{(j)}} \middle| i = 1, \dots, n, j \geq 0 \right\}.$$

Une base de l'espace cotangent  $T_{\bar{x}}^* \mathfrak{X}$  en  $\bar{x}$  est donc donnée par  $\{dx_i^{(j)} \mid i = 1, \dots, n, j \geq 0\}$  avec  $\langle dx_i^{(j)}, \frac{\partial}{\partial x_k^{(l)}} \rangle = \delta_{i,k} \delta_{j,l}$ , où  $\delta_{i,k}$  est le symbole de Kronecker.

La différentielle de  $F$  est alors donnée, en notation matri-

cielle, par

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} d\dot{x}. \quad (5)$$

Notons que la propriété de décalage de  $\frac{d}{dt}$  sur les coordonnées s'étend aux différentielles :  $\frac{d}{dt} dx = d\dot{x} = d\frac{d}{dt}x$ , i.e.  $\frac{d}{dt}$  commute avec  $d$ .

Puisqu'une fonction lisse ne dépend que d'un nombre fini de variables, sa différentielle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. De même, on définit une 1-forme sur  $\mathfrak{X}$  comme une combinaison linéaire *finie* des  $dx_i^{(j)}$ , à coefficients méromorphes de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$  ou, de façon équivalente, comme une section localement méromorphe de  $T^*\mathfrak{X}$ . L'ensemble des 1-formes est noté  $\Lambda^1(\mathfrak{X})$ . On note aussi  $\Lambda^p(\mathfrak{X})$  le module de toutes les  $p$ -formes sur  $\mathfrak{X}$ ,  $(\Lambda^p(\mathfrak{X}))^m$  l'espace de toutes les  $p$ -formes vectorielles de dimension  $m$  sur  $\mathfrak{X}$ ,  $(\Lambda(\mathfrak{X}))^m$  l'espace de toutes les formes vectorielles de dimension  $m$  de degré arbitraire sur  $\mathfrak{X}$ , et  $\mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m) = \mathcal{L}((\Lambda^p(\mathfrak{X}))^m, (\Lambda^{p+q}(\mathfrak{X}))^m, p \geq 1)$ , l'espace de tous les opérateurs linéaires de  $(\Lambda^p(\mathfrak{X}))^m$  dans  $(\Lambda^{p+q}(\mathfrak{X}))^m$  pour tout  $p \geq 1$ , où  $\mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  est l'ensemble des applications linéaires d'un espace donné  $\mathcal{P}$  dans un autre espace donné  $\mathcal{Q}$ .

Remarquons que si  $\Phi$  est une application méromorphe de  $\mathfrak{Y}$  dans  $\mathfrak{X}$ , la définition de l'image (réciproque) par  $\Phi$  d'une 1-forme est la même qu'en dimension finie.

### C. Platitude différentielle

Rappelons ([4]) qu'un système sous forme explicite est plat si et seulement s'il est L-B équivalent à un système trivial. Le lecteur peut aisément vérifier que cette définition redonne exactement celle présentée dans l'introduction. Pour les systèmes implicites, elle devient :

**Définition 2:** Le système implicite  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  est *plat* en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathbb{R}_{\infty}^m$  si et seulement s'il est L-B équivalent en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  au système implicite trivial  $(\mathbb{R}_{\infty}^m, \tau_{\mathbb{R}_{\infty}^m}, 0)$ . Dans ce cas, les isomorphismes de Lie-Bäcklund inverses  $\Phi$  et  $\Psi$  sont appelés *trivialisations inverses*.

La preuve du résultat suivant se trouve dans [2].

**Théorème 1:** Le système  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  est plat en  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \mathfrak{X}_0 \times \mathbb{R}_{\infty}^m$  si et seulement s'il existe une application méromorphe localement inversible  $\Phi$  de  $\mathbb{R}_{\infty}^m$  dans  $\mathfrak{X}_0$ , d'inverse localement méromorphe, vérifiant  $\Phi(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$ , et telle que

$$\Phi^* dF = 0. \quad (6)$$

### III. CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES DE PLATITUDE

Analysons la condition (6) en détails : Elle caractérise l'application linéaire tangente de  $\Phi$  dont l'image est entièrement contenue dans le noyau de  $dF$ . L'ensemble de telles applications peut être obtenu de façon systématique dans le formalisme des matrices polynômiales par rapport à l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dt}$  (on utilise indifféremment  $\frac{d}{dt}$  pour  $L_{\tau_{\mathfrak{X}}}$  ou  $L_{\tau_{\mathbb{R}_{\infty}^m}}$ , en l'absence d'ambiguïté) :

$$P(F) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt}, \quad P(\varphi_0) = \sum_{j \geq 0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y^{(j)}} \frac{d^j}{dt^j} \quad (7)$$

avec  $P(F)$  (resp.  $P(\varphi_0)$ ) de taille  $(n-m) \times n$  (resp.  $n \times m$ ). Dans ce formalisme, (6) s'écrit :

$$\Phi^* dF = P(F)P(\varphi_0)dy = 0. \quad (8)$$

Les éléments des matrices de (7) sont des polynômes de l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dt}$  à coefficients méromorphes de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathfrak{K}$  le corps des fonctions méromorphes de  $\mathfrak{X}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  l'anneau principal des polynômes de  $\frac{d}{dt}$  à coefficients dans  $\mathfrak{K}$ . Notons que  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  n'est pas commutatif, même si  $n = 1$  : pour tout  $a \in \mathfrak{K}$ ,  $a \neq 0$ , on a  $(\frac{d}{dt} \cdot x - x \cdot \frac{d}{dt})(a) = \dot{x}a + x\dot{a} - x\dot{a} = \dot{x}a \neq 0$ , soit  $\frac{d}{dt} \cdot x - x \cdot \frac{d}{dt} = \dot{x}$ .

Pour  $r, s \in \mathbb{N}$ , notons  $\mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$  le module des matrices de taille  $r \times s$  sur  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  (voir par ex. [26]). Rappelons que pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , l'inverse d'une matrice inversible de  $\mathcal{M}_{r,r}[\frac{d}{dt}]$  n'est pas généralement dans  $\mathcal{M}_{r,r}[\frac{d}{dt}]$ . Les matrices dont l'inverse appartient à  $\mathcal{M}_{r,r}[\frac{d}{dt}]$  sont appelées les *matrices unimodulaires* et leur ensemble est noté  $\mathcal{U}_r[\frac{d}{dt}]$ . Toute matrice dans  $\mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$  admet une *décomposition de Smith* (ou réduction diagonale). Sans perte de généralité, nous en donnons la définition pour  $P(F) \in \mathcal{M}_{n-m,n}[\frac{d}{dt}]$  :

$$VP(F)U = (\Delta, 0_{n-m,m}) \quad (9)$$

avec  $0_{n-m,m}$  la matrice de taille  $(n-m) \times m$  entièrement constituée de zéros,  $V \in \mathcal{U}_{n-m}[\frac{d}{dt}]$ ,  $U \in \mathcal{U}_n[\frac{d}{dt}]$  et  $\Delta \in \mathcal{M}_{n-m,n-m}[\frac{d}{dt}]$  matrice diagonale dont l'élément diagonal  $d_{i,i}$  divise  $d_{j,j}$  pour tout  $0 \leq i \leq j \leq n-m$ . En outre, les degrés des  $d_{i,i}$  sont définis de manière unique (voir [26]).

**Définition 3:** Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$  est dite *hyper-régulière* si et seulement si sa décomposition de Smith conduit soit à  $(I_r, 0_{r,s-r})$  si  $r < s$ , soit à  $I_r$  si  $r = s$ , soit encore à  $\begin{pmatrix} I_s \\ 0_{r-s,s} \end{pmatrix}$  si  $r > s$ .

Une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_{r,r}[\frac{d}{dt}]$  est hyper-régulière si et seulement si elle est unimodulaire.

On peut montrer que si le système  $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{X}}, F)$  est commandable au 1er ordre autour d'une courbe intégrale arbitraire, alors  $P(F)$  est hyper-régulière (voir [2]). En outre, tout système plat est commandable au 1er ordre (voir [4]).

### A. Caractérisation algébrique de la différentielle d'une trivialisation

Dorénavant, nous supposons que  $P(F)$  est hyper-régulière dans un voisinage de  $\bar{x}_0$ . Autrement dit, il existe  $V$  et  $U$  tels que

$$VP(F)U = (I_{n-m}, 0_{n-m,m}). \quad (10)$$

Il n'y a pas unicité de  $U$  et  $V$  vérifiant (10). On dit que  $U \in \mathcal{R} - \text{Smith}(P(F))$  et  $V \in \mathcal{L} - \text{Smith}(P(F))$  si elles sont telles que  $VP(F)U = (I_m, 0)$ .

De même, si  $M \in \mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$  est hyper-régulière avec  $m \leq n$ , on dit que  $V \in \mathcal{L} - \text{Smith}(M)$  et  $W \in \mathcal{R} - \text{Smith}(M)$  si  $V \in \mathcal{U}_n[\frac{d}{dt}]$  et  $W \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  vérifient  $VMW = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$ .

À la place de (8), on commence par résoudre l'équation matricielle :

$$P(F)\Theta = 0 \quad (11)$$

où la matrice  $\Theta \in \mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$  n'est pas nécessairement le gradient d'une fonction vectorielle  $\varphi_0$ .

*Lemme 1:* L'ensemble des matrices hyper-régulières  $\Theta \in \mathcal{M}_{n,m}[\frac{d}{dt}]$  vérifiant (11) est non vide et donné par

$$\Theta = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix} W \quad (12)$$

avec  $U \in R - \text{Smith}(P(F))$  et  $W \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  arbitraire.

*Lemme 2:* Pour tout  $Q \in L - \text{Smith}(\hat{U})$ , avec  $\hat{U}$  donné par

$$\hat{U} = U \begin{pmatrix} 0_{n-m,m} \\ I_m \end{pmatrix} \quad (13)$$

il existe  $Z \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  tel que

$$Q\Theta = \begin{pmatrix} I_m \\ 0_{n-m,m} \end{pmatrix} Z. \quad (14)$$

En outre, pour tout  $Q \in L - \text{Smith}(\hat{U})$ , la sous-matrice  $\hat{Q} = (0_{n-m,m}, I_m) Q$  est équivalente à  $P(F)$  ( $\exists L \in \mathcal{U}_{n-m}[\frac{d}{dt}]$  t. q.  $P(F) = L\hat{Q}$ ).

### B. Intégrabilité

Notons  $Q_{i,j} = \sum_{k \geq 0} Q_{i,j}^k \frac{d^k}{dt^k}$  l'élément  $(i,j)$  de  $Q \in L - \text{Smith}(\hat{U})$  résultant du Lemme 2. On note aussi  $\omega$  la 1-forme vectorielle de dimension  $m$  définie par

$$\begin{aligned} \omega(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} \omega_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \omega_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = (I_m, 0_{m,n-m}) Q(\bar{x}) dx|_{x_0} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} Q_{1,j}^k(\bar{x}) dx_j^{(k)}|_{x_0} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \geq 0} Q_{m,j}^k(\bar{x}) dx_j^{(k)}|_{x_0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

la restriction à  $X_0$  voulant dire que  $\bar{x} \in X_0$  vérifie  $L_{\tau_x}^k F = 0$  pour tout  $k$  et que les  $dx_j^{(k)}$  sont tels que  $dL_{\tau_x}^k F = 0$  dans  $X_0$  pour tout  $k$ . Puisque  $\hat{Q}$  est hyper-régulière, les 1-formes  $\omega_1, \dots, \omega_m$  sont indépendantes par construction.

Rappelons aussi que, si  $\tau_1, \dots, \tau_m$  sont des 1-formes indépendantes dans  $\Lambda^1(X_0)$ , le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal  $\mathfrak{T}$  généré par  $\tau_1, \dots, \tau_m$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$  des formes  $\eta \wedge \tau_i$  avec  $\eta$  une forme quelconque de degré arbitraire sur  $X_0$  et  $i = 1, \dots, m$ .

*Définition 4:* On dit que le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal  $\mathfrak{T}$  généré par  $\tau_1, \dots, \tau_m$  est *fortement fermé* si et seulement s'il existe une matrice  $M \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  telle que  $d(M\tau) = 0$ . Cette définition est bien entendu indépendante du choix des générateurs.

*Théorème 2:* Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (2) soit plat au point  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  est qu'il existe  $U \in R - \text{Smith}(P(F))$  et  $Q \in L - \text{Smith}(\hat{U})$ , avec  $\hat{U}$  donné par (13), tels que le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal  $\Omega$  généré par les 1-formes  $\omega_1, \dots, \omega_m$  définies par (15) soit fortement fermé dans  $X_0$ . Afin de développer l'expression  $d(M\tau)$  lorsque  $M$  est une matrice polynomiale, on définit l'opérateur  $\mathfrak{d}$  par :

$$\mathfrak{d}(H)\kappa = d(H\kappa) - Hd\kappa \quad (16)$$

pour toute  $p$ -forme vectorielle  $\kappa$  de dimension  $m$  dans  $(\Lambda^p(X))^m$  et tout  $p \geq 1$ . Notons que (16) définit  $\mathfrak{d}(H)$  de manière unique comme un élément de  $\mathcal{L}_1((\Lambda(X))^m)$ .

On peut prolonger  $\mathfrak{d}$  pour tout  $\mu \in \mathcal{L}_q((\Lambda(X))^m)$ , pour tout  $\kappa \in (\Lambda^p(X))^m$  et tout  $p \geq 1$  par la formule :

$$\mathfrak{d}(\mu)\kappa = d(\mu\kappa) - (-1)^q \mu d\kappa. \quad (17)$$

*Théorème 3:* Le  $\mathfrak{K}[\frac{d}{dt}]$ -idéal  $\Omega$  généré par les 1-formes  $\omega_1, \dots, \omega_m$  définies par (15) est fortement fermé dans  $X_0$  (ou, de façon équivalente, le système  $(X, \tau_X, F)$  est plat) si et seulement s'il existe  $\mu \in \mathcal{L}_1((\Lambda(X))^m)$ , et une matrice  $M \in \mathcal{U}_m[\frac{d}{dt}]$  tels que

$$d\omega = \mu\omega, \quad \mathfrak{d}(\mu) = \mu^2, \quad \mathfrak{d}(M) = -M\mu. \quad (18)$$

avec la notation  $\mu^2 = \mu\mu$ .

De plus, si (18) a lieu, une sortie plate  $y$  est obtenue par l'intégration de  $dy = M\omega$ .

Notons que les conditions (18) peuvent être vues comme une généralisation des équations de structure du repère mobile de Cartan (voir par ex. [27]) dans le contexte des variétés de jets d'ordre infini.

### C. Algorithme

Les conditions nécessaires et suffisantes (18), nous permettent d'obtenir l'algorithme suivant :

1. On commence par calculer une décomposition de Smith de  $P(F)$ , puis  $\hat{U}$  conformément aux Lemmes 1 et 2. Si  $P(F)$  n'est pas hyper-régulière, le système n'est pas plat. Dans le cas contraire, on calcule la 1-forme vectorielle  $\omega$  définie par (15).
2. On calcule l'opérateur  $\mu$  tel que  $d\omega = \mu\omega$  par identification composante par composante. On peut facilement montrer qu'un tel  $\mu$  existe toujours<sup>1</sup>.
3. Parmi les  $\mu$  possibles, seuls ceux qui vérifient  $\mathfrak{d}(\mu) = \mu^2$  sont conservés. Si aucun  $\mu$  ne vérifie cette relation, le système n'est pas plat.
4. On calcule ensuite  $M$  tel que  $\mathfrak{d}(M) = -M\mu$ , toujours par identification composante par composante.
5. Enfin, seules les matrices  $M$  unimodulaires sont conservées. Si aucune  $M$  unimodulaire n'existe, le système n'est pas plat. Dans le cas contraire, une sortie plate est obtenue par intégration de  $dy = M\omega$ , ce qui est possible puisque  $d(M\omega) = 0$ .

## IV. MISE EN ŒUVRE PAR CALCUL FORMEL

Commençons par préciser la nature des éléments avec lesquels nous travaillons.

### A. La structure des éléments de $\mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$

Les éléments d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$  sont de la forme

$$[A]_{ij} = \sum_{k \geq 0} a_{ijk} \frac{d^k}{dt^k}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (19)$$

où les  $a_{ijk}$  sont des fonctions méromorphes sur  $X$ . Ainsi, pour  $\omega \in (\Lambda^p(X))^s$ ,  $A\omega \in (\Lambda^p(X))^r$  est le vecteur dont la

<sup>1</sup>Par exemple, on vérifie facilement que  $\mathfrak{d}(\hat{Q})\hat{U}$ , avec  $\hat{Q}$  et  $\hat{U}$  donnés par (13), (14), est tel que  $d\omega = \mathfrak{d}(\hat{Q})\hat{U}\omega$ . Cependant, ce choix n'est pas nécessairement utile car il ne vérifie pas en général la condition de l'étape suivante :  $\mathfrak{d}(\mathfrak{d}(\hat{Q})\hat{U}) \neq \mathfrak{d}(\hat{Q})\hat{U}\mathfrak{d}(\hat{Q})\hat{U}$ .

ième composante est

$$[A\omega]_i = \sum_{j=1}^s \sum_{k \geq 0} a_{ijk} L_{\tau_x}^k \omega_j, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (20)$$

La multiplication de deux matrices  $A \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}[\frac{d}{dt}]$  et  $B \in \mathcal{M}_{r_2, r_3}[\frac{d}{dt}]$  données par  $[A]_{i,j} = \sum_{k \geq 0} a_{i,j,k} \frac{d^k}{dt^k}$ , et  $[B]_{i,j} = \sum_{k \geq 0} b_{i,j,k} \frac{d^k}{dt^k}$ , est

$$\begin{aligned} [AB]_{i,j} &= \sum_{l=1}^{r_2} \sum_{k_1, k_2 \geq 0} a_{i,l,k_1} \frac{d^{k_1}}{dt^{k_1}} \left( b_{l,j,k_2} \frac{d^{k_2}}{dt^{k_2}} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{r_2} \sum_{k_1, k_2 \geq 0} \sum_{k_3=0}^{k_1} \binom{k_3}{k_1} a_{i,l,k_1} (L_{\tau_x}^{k_1-k_3} b_{l,j,k_2}) \frac{d^{k_2+k_3}}{dt^{k_2+k_3}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{avec } \binom{k_3}{k_1} = \frac{k_1!}{k_3!(k_1-k_3)!}.$$

En indiquant explicitement la dépendance des coordonnées en la variable indépendante  $t$ , on peut utiliser la commande *mult* (avec le symbole *DDt* pour  $\frac{d}{dt}$ ) de la librairie *DETools* de *Maple 11*. Ainsi, l'algorithme de multiplication (en *Maple 11*) pour deux matrices  $A \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}[\frac{d}{dt}]$  et  $B \in \mathcal{M}_{r_2, r_3}[\frac{d}{dt}]$  revient à

```
for i from 1 to r1 do
for j from 1 to r3 do
for k from 1 to r2 do
C[i,j]:=C[i,j]+DETools[mult](A[i,k],B[k,j],[DDt,t]);
end do; end do; end do;
```

Cette approche a l'avantage de ne pas avoir besoin d'une construction explicite du champ de Cartan pour le calcul des dérivées de Lie (voir la discussion en Section IV-D).

### B. Décomposition de Smith des éléments de $\mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$

Avec le produit matriciel de  $\mathcal{R}[\frac{d}{dt}]$ , que nous venons de décrire, la décomposition de Smith d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{r,s}[\frac{d}{dt}]$  est obtenue en adaptant à notre contexte non-commutatif, l'algorithme proposé dans [28] par ex., pour les matrices polynômiales à coefficients constants, qui part de la construction des matrices unimodulaires élémentaires associées aux actions élémentaires à droite et à gauche (voir [26] pour plus de détails). La librairie *DETools* de *Maple 11* contient déjà toutes les opérations nécessaires.

### C. La structure des éléments de $\mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$

L'élément  $(i, j)$  d'un opérateur  $\mu \in \mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$  est de la forme

$$[\mu]_{ij} = \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \wedge \frac{d^k}{dt^k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

où  $\mu_{ijk}$  est une  $q$ -forme arbitraire, ou ce qui revient à dire que pour tout  $\omega \in (\Lambda^p(\mathfrak{X}))^m$ ,  $\mu\omega \in (\Lambda^{p+q}(\mathfrak{X}))^m$  est donné par

$$[\mu\omega]_i = \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \wedge L_{\tau_x}^k \omega_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (23)$$

Pour coder les opérateurs  $\mu \in \mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$  en *Maple 11* on définit l'opérateur lui-même comme une matrice dont

les éléments sont des polynômes de  $\frac{d}{dt}$  (symbolisé en *Maple* par *DDt*) :

$$[\mu]_{ij} = \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \frac{d^k}{dt^k}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

et son évaluation sur une  $p$ -forme  $\omega$ , d'après (23), appelée à la fois  $\wedge$  et  $\frac{d}{dt}$ . Nous devons donc créer une nouvelle fonction, appelée *Dtwedge*, dont l'algorithme est, pour  $i$  et  $j$  fixés :

```
muw:=Tools:-DGmap(1,coeff,mu,DDt,0) &wedge w;
if degmuddt>0 then
wk:=w;
for k from 1 to degmuddt do
wk:=LieDerivative(CF,wk);
muw:=muw &plus
(Tools:-DGmap(1,coeff,mu,DDt,k) &wedge wk);
end do;
end if;
```

Remarquons que, dans ce contexte, la dérivée de Lie par rapport à un champ de Cartan *CF* doit être définie, ainsi que l'ordre auquel les coordonnées doivent être prolongées. On trouvera une discussion plus détaillée sur l'ordre de troncature en Section IV-D), *degmuddt* étant le degré de  $\mu_{ij}$  par rapport à *DDt* (i.e.  $\frac{d}{dt}$ ). Bien que l'évaluation de (23) fasse appel à une combinaison standard d'opérations, sa mise en œuvre en calcul formel usuel n'est pas si simple. Dans le contexte choisi, la commande *DGmap* de la librairie *DifferentialGeometry* de *Maple* peut être utilisée pour graduer les éléments de  $\mu_{ij}$  par leur degré par rapport à  $\frac{d}{dt}/DDt$ .

### C.1 Multiplication de deux éléments $\mu \in \mathcal{L}_{q_1}((\Lambda(\mathfrak{X}))^{m_1})$ et $\kappa \in \mathcal{L}_{q_2}((\Lambda(\mathfrak{X}))^{m_2})$

Considérons  $\mu = \sum_{k \geq 0} \mu_k \wedge \frac{d^k}{dt^k}$  où les  $\mu_k$  sont des matrices dont les éléments appartiennent à  $\Lambda^{q_1}(\mathfrak{X})$ , et  $\kappa = \sum_{k \geq 0} \kappa_k \wedge \frac{d^k}{dt^k}$  où les  $\kappa_k$  sont des matrices dont les éléments appartiennent à  $\Lambda^{q_2}(\mathfrak{X})$ . Le produit  $\mu\kappa$  est évalué en introduisant le produit  $\mu_k \omega$  pour tout  $\omega \in (\Lambda(\mathfrak{X}))^m$  :

$$\begin{aligned} \mu\kappa\omega &= \mu(\kappa\omega) = \sum_{k_1 \geq 0} \mu_{k_1} \wedge L_{\tau_x}^{k_1} \left( \sum_{k_2 \geq 0} \kappa_{k_2} \wedge L_{\tau_x}^{k_2} \omega \right) \\ &= \sum_{k_1, k_2 \geq 0} \sum_{k_3=0}^{k_1} \binom{k_3}{k_1} \mu_{k_1} \wedge (L_{\tau_x}^{k_1-k_3} \kappa_{k_2}) \wedge (L_{\tau_x}^{k_2+k_3} \omega) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mu\kappa = \sum_{k_1, k_2 \geq 0} \sum_{k_3=0}^{k_1} \binom{k_3}{k_1} \mu_{k_1} \wedge (L_{\tau_x}^{k_1-k_3} \kappa_{k_2}) \wedge \frac{d^{k_2+k_3}}{dt^{k_2+k_3}} \quad (25)$$

En particulier, posant  $\mu = \frac{d}{dt}$ , on déduit immédiatement :

$$\frac{d}{dt} \kappa = \sum_k \left( L_{\tau_x} \kappa_k \wedge \frac{d^k}{dt^k} + \kappa_k \wedge \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \right) \quad (26)$$

Il est donc clair que la multiplication de deux tels opérateurs ne peut pas être réalisée par la fonction *Dtwedge* définie précédemment. On la remplace par la fonction *Dtwedgeop*, définie par l'algorithme (toujours en *Maple 11*)

```
mukappa:=Tools:-DGmap(1,coeff,mu,DDt,0) &wedge kappa;
if degmuddt>0 then
kappak:=kappa;
```

```

for i from 1 to degmuddt do
  kappak:=LieDerivative(CF,kappak) &plus
                                     (DDt &mult kappak);
  mukappa:=mukappa &plus
              (Tools:-DGmap(1,coeff,mu,DDt,i) &wedge kappak);
end do; #for i
end if;

```

Les premières opérations dans la boucle *for* interne construit donc la règle de dérivation introduite par (26).

## C.2 L'opérateur $\mathfrak{d}$

Nous abordons maintenant l'implémentation de l'opérateur  $\mathfrak{d} : \mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m) \rightarrow \mathcal{L}_{q+1}((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$  pour tout  $q \geq 0$ , défini par (17).

En premier lieu, remarquons que, pour  $m = 1$ , si  $\mu$  est un polynôme de degré 0 en  $\frac{d}{dt}$ , i.e.  $\mu = \mu_0 \wedge$  avec  $\mu_0 \in \Lambda^q(\mathfrak{X})$ , (17) n'est autre que la règle usuelle d'anti-dérivation de la dérivée extérieure : pour tout  $\omega \in \Lambda^p(\mathfrak{X})$  on a

$$d(\mu\omega) = \underbrace{d\mu_0 \wedge \omega}_{\mathfrak{d}(\mu)} + (-1)^q \mu_0 \wedge d\omega \quad (27)$$

Revenons au cas général avec  $\mu \in \mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$  et  $\omega \in (\Lambda^p(\mathfrak{X}))^m$ . On a

$$\begin{aligned}
[d(\mu\omega)]_i &= d \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \wedge L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \omega_j \right), \quad i = 1, \dots, m \\
&= \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} d\mu_{ijk} \wedge L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \omega_j \right. \\
&\quad \left. + (-1)^q \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \wedge d(L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \omega_j) \right) \quad (28) \\
&= \left( \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} d\mu_{ijk} \wedge L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \omega_j \right. \\
&\quad \left. + (-1)^q \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} \mu_{ijk} \wedge L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k (d\omega_j) \right)
\end{aligned}$$

En combinant (17) et (28), il vient :

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{d}(\mu)\omega]_i &= [d(\mu\omega) - (-1)^q \mu d\omega]_i, \quad i = 1, \dots, m \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k \geq 0} d\mu_{ijk} \wedge L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^k \omega_j \quad (29)
\end{aligned}$$

Par conséquent, les éléments de  $\mathfrak{d}(\mu)$  sont donnés par

$$[\mathfrak{d}(\mu)]_{ij} = \sum_{k \geq 0} d\mu_{ijk} \wedge \frac{d^k}{dt^k}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

Notons que l'opérateur  $\mu \in \mathcal{L}_q((\Lambda(\mathfrak{X}))^m)$  est spécifié dans *Maple* comme un polynôme de *DDt*, ce dernier opérateur étant considéré comme une constante pour la dérivation extérieure *ExteriorDerivative* dans la variété de jets  $\mathfrak{X}$  de coordonnées  $(x, \dot{x}, \dots)$ . Si bien que, dans notre implémentation en *Maple*,  $\mathfrak{d}$  revient à appliquer la commande *ExteriorDerivative* à  $\mu$ .

## D. Discussion sur l'ordre et le degré de troncature

L'algorithme III-C comporte un grand nombre de degrés de liberté. La décomposition de Smith peut se faire de différentes manières, conduisant à des 1-formes vectorielles  $\omega$  différentes, bien que n'importe quel choix de l'idéal  $\Omega$  soit, au moins algébriquement, équivalent. Cependant, l'ensemble des opérateurs  $\mu$  tels que  $d\omega = \mu\omega$ , est non seulement toujours non vide, mais généralement contient une infinité d'éléments. Une borne inférieure de son degré par rapport à  $\frac{d}{dt}$  est facile à calculer, mais il n'y a pas *a priori* de borne supérieure. La seule restriction est que l'équation  $\mathfrak{d}(\mu) = \mu^2$  ait lieu. Si l'on note  $\mu = \sum_{k \geq 0} \mu_k \wedge \frac{d^k}{dt^k}$ , d'après (30) et (25), la matrice  $\mu_k$  doit être solution d'une suite infinie d'équations différentielles :

$$d\mu_k = \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1 \geq k-k_2} \binom{k-k_2}{k_1} \mu_{k_1} \wedge (L_{\tau_{\mathfrak{X}}}^{k_1+k_2-k} \mu_{k_2}) \quad (31)$$

pour tout  $k \geq 0$ . Cependant, comme le degré de  $\mu$  par rapport à  $\frac{d}{dt}$  est fini, d'une part, et comme le nombre de composantes des coordonnées de  $\mathfrak{X}$  apparaissant dans  $\mu$  est fini, d'autre part, le nombre d'équations indépendantes non triviales de (31) est fini. En outre, (31) établit un lien entre le nombre de coordonnées actives, via l'expression de  $d\mu_k$ , et le degré polynomial de  $\mu$ . Ainsi, pour un ordre de troncature donné<sup>2</sup> et un degré donné, compatibles relativement à (31), des solutions  $\mu$  et  $M$ , si elles existent, seront obtenues grâce à l'algorithme précédent. Sinon, l'ordre de troncature et/ou le degré doivent être augmentés. Malheureusement, il n'y a pas de réponse claire à la question "ce processus finit-il?".

Une fois  $\mu$  déterminé, suivant l'étape 4, on doit déterminer une matrice unimodulaire  $M \in \mathcal{U}_p \left[ \frac{d}{dt} \right]$  vérifiant  $\mathfrak{d}(M) = -M\mu$ . On peut toujours proposer de trouver  $M$  sous forme triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, les éléments nord-est de  $M$  étant des polynômes en  $\frac{d}{dt}$  de degré suffisant et dont les coefficients dépendent des coordonnées convenablement tronquées. Si le nombre de degrés de liberté de  $M$  est insuffisant pour trouver une solution, on peut être amenés à construire des matrices unimodulaires plus compliquées par multiplication à gauche et à droite par des actions élémentaires à droite et/ou à gauche (voir par ex. [26]).

Si à l'étape 4 aucune matrice  $M$  n'est trouvée, il convient de revenir à l'étape 3 et d'augmenter l'ordre de troncature et/ou le degré de  $\mu$  pour introduire des degrés de liberté supplémentaires.

La construction des opérateurs généraux  $\mu$  et des matrices  $M$  pour des ordres de troncature et des degrés donnés, avec la possibilité d'itérer sur l'ordre de troncature et le degré par rapport à  $\frac{d}{dt}$ , est en cours de construction en *Maple 11*.

## V. VÉHICULE NON HOLONOME

Considérons le système de dimension 3 dans le plan  $x - y$ , modélisant la cinématique d'un véhicule de longueur  $l$ , dont l'orientation est décrite par l'angle  $\theta$ , les coordonnées  $(x, y)$  représentant la position du milieu de l'essieu arrière,

<sup>2</sup>par troncature, on désigne l'élimination d'une infinité de coordonnées dont  $\mu$  ne dépend pas

et contrôlé par le module de la vitesse  $u$  et la position angulaire  $\varphi$  des roues avant.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \theta \\ \dot{y} &= u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{u}{l} \tan \varphi\end{aligned}\quad (32)$$

Puisque  $n = 3$  et  $m = 2$ , donc  $n - m = 1$ , (32) est équivalent à l'équation implicite scalaire obtenue en éliminant les entrées  $u$  et  $\varphi$  :

$$F(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (33)$$

On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned}P(F) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} & \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{d}{dt} & \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \frac{d}{dt} & -\cos \theta \frac{d}{dt} & \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (34)$$

Appliquons l'algorithme III-C.

**Étape 1 :** Posons  $E = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta$ , et appliquons la décomposition de Smith (avec la multiplication matricielle définie à la section IV-A). On obtient  $U \in \mathbf{R} - \text{Smith}(P(F))$  avec

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{E} & \frac{\cos \theta}{E} \frac{d}{dt} & -\frac{\sin \theta}{E} \frac{d}{dt} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\hat{U} = U \begin{pmatrix} 0_{1,2} \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\cos \theta}{E} \frac{d}{dt} & -\frac{\sin \theta}{E} \frac{d}{dt} \end{pmatrix}$$

où  $I_2$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^2$ . De même, le calcul de  $Q \in \mathbf{L} - \text{Smith}(\hat{U})$  donne

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \theta}{E} \frac{d}{dt} & -\frac{\cos \theta}{E} \frac{d}{dt} & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplions  $Q$  par le vecteur  $(dx, dy, d\theta)^T$ . La dernière ligne est alors  $\frac{1}{E}(\sin \theta d\dot{x} - \cos \theta d\dot{y} + (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)d\theta) = \frac{1}{E}d(\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta)$  et, avec (33), est identiquement nulle sur  $\mathfrak{X}_0$ .

Le reste du système, i.e.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

est trivialement fortement fermé avec  $M = I_2$ , ce qui donne finalement la sortie plate (ici notée  $y_p$  pour éviter la confusion avec la coordonnée  $y$ )  $y_p = (y, x)^T$ . On retrouve donc ainsi la sortie plate de [29], [30], à une permutation près.

**Étape 1.b :** D'autres décompositions de  $P(F)$ , donné par (34), peuvent bien sûr être obtenues. Elles sont toutes équivalentes à une transformation unimodulaire près. Cependant, la 1-forme  $\omega$ , contrairement à ce qui se passe à l'étape précédente, peut ne pas être intégrable. On va montrer comment utiliser les équations de structure du

repère mobile généralisé (18) pour obtenir une matrice  $M$  telle que  $M\omega$  soit intégrable. Il suffit pour cela de reprendre la décomposition de Smith de  $P(F)$  en multipliant

à droite par  $\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et en utilisant la formule

$\sin \theta \frac{d}{dt}(\cos \theta) - \cos \theta \frac{d}{dt}(\sin \theta) = -\dot{\theta}$ . La décomposition de Smith à droite donne alors

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{\theta} \cos^2 \theta \frac{d}{dt} & \frac{1}{\theta} E \cos \theta \\ \sin \theta & 1 - \frac{1}{\theta} \sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} & \frac{1}{\theta} E \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\theta} \cos^2 \theta \frac{d}{dt} & \frac{1}{\theta} E \cos \theta \\ 1 - \frac{1}{\theta} \sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} & \frac{1}{\theta} E \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Smith à gauche de  $\hat{U}$  conduit alors à  $Q \in \mathbf{L} - \text{Smith}(\hat{U})$  avec

$$Q = \begin{pmatrix} -\tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\theta} \sin \theta \cos \theta \frac{d}{dt} & \frac{1}{\theta} \cos^2 \theta \frac{d}{dt} & -\frac{1}{\theta} E \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Étape 2 :** La 1-forme  $\omega$  est alors

$$\omega = (\omega_1, \omega_2)^T = \hat{Q}(dx, dy, d\theta)^T = (-\tan \theta dx + dy, d\theta)^T$$

Sa dérivée extérieure n'est pas nulle :

$$d\omega = (d\omega_1, d\omega_2)^T = \left(-\frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \wedge dx, 0\right)^T$$

ce qui montre que  $\omega$  n'est pas fermée.

**Étape 3 :** On introduit la matrice  $\mu$  la plus simple telle que  $d\omega = \mu\omega$  :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{120} \wedge \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par un calcul direct (utilisant *Dtwedgeop*) :

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_{120} \wedge \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_{120} \wedge \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

D'autre part, on a

$$\mathfrak{d}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & d\left(\frac{1}{\cos^2 \theta} dx + \mu_{1230}(x, y, \theta)d\theta\right) \wedge \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation  $\mu^2 = \mathfrak{d}(\mu)$  se traduit alors par le système d'EDP :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \mu_{1230}(x, y, \theta) &= \frac{2 \sin(\theta)}{\cos^3(\theta)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mu_{1230}(x, y, \theta) &= 0\end{aligned}$$

qui a pour solution

$$\mu_{1230}(x, y, \theta) = \frac{2 \sin(\theta)x}{\cos^3(\theta)} + C_1(\theta). \quad (35)$$

Donc

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} dx + \left(\frac{2 \sin(\theta)x}{\cos^3(\theta)} + C_1(\theta)\right) d\theta\right) \wedge \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Étapes 4/5 :** La matrice unimodulaire la plus simple est d'ordre 0 et de degré 0 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m_{120}(x, y, \theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons  $\mathfrak{d}(M) = -M\mu$ . On obtient  $\begin{pmatrix} 0 & dm_{120} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mu$ , i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} m_{120}(x, y, \theta) &= -\frac{1}{\cos^2 \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} m_{120}(x, y, \theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} m_{120}(x, y, \theta) &= -\left( \frac{2 \sin(\theta)x}{\cos^3(\theta)} + C_1(\theta) \right) \end{aligned}$$

dont la solution est

$$m_{120} = -\frac{x}{\cos^2(\theta)} + C_2(\theta) \quad (36)$$

avec  $C_1(\theta)$  dans (35) donné par  $C_1(\theta) = -\frac{d}{d\theta} C_2(\theta)$ . Il en résulte que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{\cos^2(\theta)} + C_2(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que la sortie plate, notée comme précédemment  $y_p$ , doit vérifier :

$$dy_p = M\omega = \begin{pmatrix} -\tan(\theta)dx + dy + \left(-\frac{x}{\cos^2(\theta)} + C_2(\theta)\right)d\theta \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Cette 1-forme est bien fermée et il vient

$$y_p = (y - x \tan(\theta) + C_3(\theta), \theta)^T.$$

## VI. CONCLUSIONS

Dans ce papier, nous discutons la mise en œuvre par calcul formel des conditions nécessaires et suffisantes de platitude différentielle. Cette mise en œuvre nécessite la réalisation de plusieurs fonctions intermédiaires permettant le codage et le calcul d'opérateurs linéaires représentés par des matrices polynômiales en  $\frac{d}{dt}$  dont les coefficients sont des formes différentielles de degré quelconque à coefficients dans le corps des fonctions méromorphes sur la variété de jets infinis dans laquelle nous travaillons. Toutes ces fonctions ont été construites dans *Maple 11*. Insistons sur le fait que comme leur construction fait appel à la fois à des opérations de géométrie différentielle et d'algèbre, des fonctions intermédiaires spécifiquement adaptées à ce cas ont dû être créées. Mentionnons aussi que la structure des solutions de la famille d'équations (31) sera étudiée plus en détails dans un prochain travail.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Lévine. On flatness necessary and sufficient conditions. *Proc. of IFAC NOLCOS 2004 Conference*, Stuttgart, 2004.
- [2] J. Lévine. On necessary and sufficient conditions for differential flatness. *arXiv :math.OA/0605405v2*, pages 1–28, 2006.
- [3] Ph. Martin, R.M. Murray, et P. Rouchon. Flat systems. G. Bastin et M. Gevers, editors, *Plenary Lectures and Minicourses, Proc. ECC 97, Brussels*, pages 211–264, 1997.
- [4] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, et P. Rouchon. A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44(5) :922–937, 1999.

- [5] Ph. Martin. *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*. PhD thesis, École des Mines de Paris, 1992.
- [6] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, et P. Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sci. Paris*, I-315 :619–624, 1992.
- [7] B. Charlet, J. Lévine, et R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control Optimization*, 29(1) :38–57, 1991.
- [8] J. Franch. *Flatness, Tangent Systems and Flat Outputs*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya Jordi Girona, 1999.
- [9] W.F. Shadwick. Absolute equivalence and dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 15 :35–39, 1990.
- [10] W.M. Sluis. A necessary condition for dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 21 :277–283, 1993.
- [11] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, et P. Rouchon. Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61(6) :1327–1361, 1995.
- [12] E. Aranda-Bricaire, C.H. Moog, et J.-B. Pomet. A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40(1) :127–132, 1995.
- [13] B. Jakubczyk. Invariants of dynamic feedback and free systems. *Proc. ECC'93, Groningen*, pages 1510–1513, 1993.
- [14] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, et R.M. Murray. Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems. *SIAM J. Control Optim.*, 36(4) :1225–1239, 1998.
- [15] J.-B. Pomet. A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. B. Jakubczyk, W. Respondek, et T. Rzezuchowski, editors, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, pages 319–339. Banach Center Publications, Warsaw, 1993.
- [16] P.S. Pereira da Silva et C. Corrêa Filho. Relative flatness and flatness of implicit systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 39(6) :1929–1951, 2001.
- [17] M. Rathinam et R.M. Murray. Configuration flatness of Lagrangian systems underactuated by one control. *SIAM J. Control and Optimization*, 36(1) :164–179, 1998.
- [18] V.N. Chetverikov. New flatness conditions for control systems. *Proceedings of NOLCOS'01, St. Petersburg*, pages 168–173, 2001.
- [19] Ph. Martin et P. Rouchon. Systems without drift and flatness. *Proc. MTNS 93, Regensburg, Germany*, August 1993.
- [20] P. S. Pereira da Silva. Flatness of nonlinear control systems : a Cartan-Kähler approach. *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS'2000), Perpignan*, pages 1–10, 2000.
- [21] J.-B. Pomet. On dynamic feedback linearization of four-dimensional affine control systems with two inputs. *ESAIM-COCV*, 1997. [http ://www.emath.fr/Maths/Cocv/Articles/articleEng.html](http://www.emath.fr/Maths/Cocv/Articles/articleEng.html).
- [22] P. Rouchon. Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization. *J. Math. Systems Estim. Control*, 4(2) :257–260, 1994.
- [23] I. S. Krasil'shchik, V. V. Lychagin, et A. M. Vinogradov. *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. Gordon and Breach, New York, 1986.
- [24] V.V. Zharinov. *Geometrical Aspect of Partial Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1992.
- [25] J. Lévine et D.V. Nguyen. Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *Systems & Control Letters*, 48 :69–75, 2003.
- [26] P.M. Cohn. *Free Rings and Their Relations*. Academic Press, London, 1985.
- [27] S.S. Chern, W.H. Chen, et K.S. Lam. *Lectures on Differential Geometry*, volume 1 of *Series on University Mathematics*. World Scientific, 2000.
- [28] I. Gohberg, P. Lancaster, et L. Rodman. *Matrix Polynomials*. Academic Press, Berlin, 1982.
- [29] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, et Ph. Martin. Flatness, motion planning and trailer systems. *Proc. IEEE Conf. Decision and Control, San Antonio*, December 1993.
- [30] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, et Ph. Martin. Flatness and motion planning : the car with n-trailers. *Proc. ECC'93, Groningen*, pages 1518–1522, 1993.